INSTRUKCJA LABORATORYJNA

Równanie Schrödingera i kwantowanie energii

Wirtualne ćwiczenie: widmo studni potencjału, skalowanie energii, stany związane i tunelowanie.

WYDANIE	CZAS	ZADANIA	PRZYRZĄDY
22 listopada 2026	**ok. 75 min**	**4 + sprawozdanie**	**spektrometr, stanowisko tunelowe**

Ćwiczenie wykonuje się w lekcji online — tam są wirtualne przyrządy, rejestrator danych i automatyczne sprawozdanie. Ten dokument służy do przygotowania się i do pracy na papierze: karty pomiarów, wyniki i wnioski można wypełniać ręcznie.

SPIS TREŚCI

1. Przygotowanie
2. Zadanie 1. Widmo nieskończonej studni
3. Zadanie 2. Energia a szerokość studni
4. Zadanie 3. Skończona studnia: liczba stanów związanych
5. Zadanie 4. Tunelowanie przez barierę
6. Sprawozdanie

CEL ĆWICZENIA

- zmierzyć widmo energii elektronu w studni potencjału i sprawdzić zależność $E_n \propto n^2$,
- wyznaczyć, jak energia stanu podstawowego zależy od szerokości studni,
- zbadać, przy jakiej głębokości skończona studnia zyskuje kolejne stany związane,
- zmierzyć współczynnik przejścia przez barierę i wyznaczyć stałą zaniku κ,
- linearyzować zależności i dopasowywać do nich prostą metodą najmniejszych kwadratów.

PRZYRZĄDY

- **Wirtualny spektrometr** mierzy energie poziomów elektronu ($m = m_e$) w studni o zadanej szerokości i głębokości. Niepewność pojedynczego pomiaru to około 0,4%.
- **Stanowisko tunelowe** mierzy współczynnik przejścia T elektronu przez prostokątną barierę. Niepewność to około 3%.
- **Rejestrator danych** zapisuje każdy pomiar w tabeli pod przyrządem. Pomiary są zaszumione jak w prawdziwym laboratorium, więc każdy uczestnik dostaje trochę inne liczby.
- Przydatna stała: $\dfrac{\hbar^2}{2m_e} = 0{,}0381\ \text{eV}\cdot\text{nm}^2$.

Przygotowanie

Ćwiczenie opiera się na lekcji „Notatki". Zanim zaczniesz, upewnij się, że potrafisz odpowiedzieć na te pytania (w razie wątpliwości wróć do **notatek** albo przejrzyj **fiszki**):

1. Jak energia E_n nieskończonej studni zależy od numeru stanu n i od szerokości L?
2. Dlaczego skończona studnia ma skończenie wiele stanów związanych?
3. Jak szybko funkcja falowa zanika w obszarze, gdzie $E < V$?

Linearyzacja i dopasowanie prostej

Zależności z tego ćwiczenia nie są liniowe, ale po zmianie zmiennych na wykresie stają się prostymi:

- $E = C\,n^2$ — rysujemy E w funkcji n^2: prosta przez zero o nachyleniu C,
- $E = A\,L^{p}$ — rysujemy $\ln E$ w funkcji $\ln L$: prosta o nachyleniu p,
- $T \approx T_0\,e^{-2\kappa w}$ — rysujemy $\ln T$ w funkcji w: prosta o nachyleniu -2κ.

W każdym zadaniu sam wybierasz, co odłożyć na osiach. Program dopasowuje prostą $y = a\,x + b$ metodą najmniejszych kwadratów i podaje niepewności $u(a)$, $u(b)$ oraz współczynnik determinacji R^2. Wartość R^2 bliska 1 oznacza, że punkty dobrze układają się na prostej — to znak, że linearyzacja jest właściwa.

Zadanie 1. Widmo nieskończonej studni

Elektron jest zamknięty w nieskończonej studni o szerokości $L = 1$ nm. Teoria przewiduje poziomy

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pomiary

1. Ustaw na spektrometrze numer poziomu n i kliknij **Zmierz**.
2. Zmierz co najmniej pięć różnych poziomów, najlepiej od $n = 1$ do $n = 8$.

3. Możesz powtórzyć pomiar — nowy wynik zastąpi poprzedni dla tego samego n.

KARTA POMIARÓW — SPEKTROMETR · STUDNIA L = 1 NM

Poziom n: od 1 do 8 · co najmniej 5 pomiarów

Lp.	n	E_n (eV)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Opracowanie

1. Przełączaj rodzaj wykresu i wybierz ten, na którym punkty leżą na prostej.
2. Z nachylenia prostej odczytaj energię stanu podstawowego E_1 i porównaj ją z teorią.

WYNIKI OPRACOWANIA

Możliwe wykresy: E_n od n · E_n od n^2 · E_n od n^3

Prosta $y = a\,x + b$: a = _____ ± _____ b = _____ ± _____ R^2 = _____

1. Energia stanu podstawowego E_1 — nachylenie prostej E_n od n^2 = _____ eV

Wnioski

Czy wyraz wolny b jest zgodny z zerem w granicach niepewności? Co by oznaczało, gdyby nie był? Dlaczego na wykresie nie ma punktu dla $n = 0$?

TWOJE WNIOSKI

Zadanie 2. Energia a szerokość studni

Teraz zmieniamy szerokość studni L i mierzymy tylko energię stanu podstawowego E_1. Spodziewamy się zależności potęgowej $E_1 \propto L^p$.

Pomiary

1. Ustaw suwakiem szerokość L i kliknij **Zmierz**.
2. Zmierz E_1 dla co najmniej sześciu szerokości z zakresu od 0,5 do 3 nm, rozłożonych w całym zakresie.

KARTA POMIARÓW — SPEKTROMETR · STAN PODSTAWOWY

Szerokość studni L: od 0,5 do 3 nm · co najmniej 6 pomiarów

Lp.	L (nm)	E_1 (eV)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Opracowanie

1. Na wykresie $\ln E_1$ od $\ln L$ odczytaj wykładnik p.
2. Na wykresie E_1 od $1/L^2$ odczytaj stałą C w zależności $E_1 = C/L^2$.
3. Wykorzystaj swoje C: oblicz, jak szeroka musi być studnia, żeby przejście $2 \to 1$ dawało foton zielonego światła o energii $2{,}3$ eV. Przypomnij sobie, że $E_2 - E_1 = 3E_1$.

WYNIKI OPRACOWANIA

Możliwe wykresy: E_1 od L · E_1 od 1/L · E_1 od $1/L^2$ · ln E_1 od ln L

Prosta $y = a\,x + b$: a = _____ ± _____ b = _____ ± _____ R^2 = _____

1. Wykładnik p w zależności $E_1 \propto L^p$ (nachylenie wykresu $\ln E_1$ od $\ln L$) = _____
2. Stała C w zależności $E_1 = C/L^2$ (nachylenie wykresu E_1 od $1/L^2$) = _____ eV·nm²
3. Szerokość studni, dla której przejście $2 \to 1$ daje foton o energii $2{,}3$ eV (użyj swojego C) = _____ nm

Wnioski

Dlaczego mniejsze kropki kwantowe świecą bardziej niebieskim światłem? Czy uzyskana szerokość jest realistyczna dla kropki kwantowej (typowe rozmiary to kilka nanometrów)? Co zmieniłaby inna masa efektywna elektronu w półprzewodniku?

TWOJE WNIOSKI

Zadanie 3. Skończona studnia: liczba stanów związanych

Studnia ma szerokość $L = 2a = 1$ nm, ale skończoną głębokość V_0. Z rozwiązania graficznego wynika, że kolejny stan związany pojawia się, gdy parametr

$$z_0 = \frac{a\sqrt{2m_e V_0}}{\hbar}$$

przekracza kolejną wielokrotność $\pi/2$.

Pomiary

1. Ustaw głębokość V_0 i kliknij **Zmierz** — spektrometr policzy stany związane i poda energię najniższego.
2. Przejdź cały zakres od 0,05 do 3 eV (co najmniej osiem pomiarów).

3. Znajdź możliwie dokładnie najmniejsze V_0, przy którym są **trzy** stany związane. Zawężaj przedział, zmieniając głębokość o 0,01 eV.

KARTA POMIARÓW — SPEKTROMETR · STUDNIA L = 1 NM, GŁĘBOKOŚĆ V_0

Głębokość studni V_0: od 0,05 do 3 eV · co najmniej 8 pomiarów

Lp.	V_0 (eV)	N	E_1 (eV)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Opracowanie

1. Narysuj liczbę stanów N w funkcji V_0, a potem w funkcji $\sqrt{V_0}$. Na którym wykresie progi są równo rozłożone i dlaczego?
2. Włącz przewidywania teorii i porównaj z pomiarami.
3. Podaj zmierzoną głębokość, przy której pojawia się trzeci stan.

WYNIKI OPRACOWANIA

Możliwe wykresy: N od V_0 · N od $\sqrt{V_0}$ · E_1 od V_0

1. Najmniejsza głębokość V_0, przy której studnia ma trzy stany związane = _____ eV
2. Wartość $z_0 = a\sqrt{2m_e V_0}/\hbar$ dla Twojego progu ($a = 0{,}5$ nm) = _____

Wnioski

Jaką wartość ma z_0 przy progu dla trzeciego stanu? Czy płytka studnia może nie mieć żadnego stanu związanego? Jak zmieni się E_1, gdy V_0 rośnie — do jakiej wartości dąży?

TWOJE WNIOSKI

Zadanie 4. Tunelowanie przez barierę

Elektron o energii $E = 0{,}20$ eV pada na barierę o wysokości $V_0 = 0{,}50$ eV i szerokości w. Klasycznie zawsze by się odbił. Dla grubej bariery współczynnik przejścia maleje wykładniczo:

$$T \approx T_0\, e^{-2\kappa w}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m_e(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Pomiary

1. Ustaw szerokość bariery w i kliknij **Zmierz**.
2. Zmierz T dla co najmniej sześciu szerokości od 0,5 do 1,5 nm.
3. Dodatkowo zmierz T dla dwóch cienkich barier (0,2 i 0,3 nm).

KARTA POMIARÓW — STANOWISKO TUNELOWE · E = 0,20 EV, V_0 = 0,50 EV

Szerokość bariery w: od 0,2 do 1,5 nm · co najmniej 6 pomiarów

Lp.	w (nm)	T
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Opracowanie

1. Wybierz wykres, na którym punkty dla grubych barier leżą na prostej.
2. Z nachylenia oblicz κ i porównaj z wartością teoretyczną.

WYNIKI OPRACOWANIA

Możliwe wykresy: T od w · ln T od w · ln T od ln w

Prosta $y = a\,x + b$: a = _____ ± _____ b = _____ ± _____ R^2 = _____

1. Stała zaniku κ z nachylenia wykresu $\ln T$ od w (nachylenie $= -2\kappa$) = _____ nm^{-1}

Wnioski

Dlaczego punkty dla cienkich barier odstają od prostej? Ile razy maleje T, gdy bariera pogrubia się o 0,1 nm? Dlaczego tunelowanie ma ogromne znaczenie w tranzystorach o rozmiarach kilku nanometrów i w skaningowym mikroskopie tunelowym?

TWOJE WNIOSKI

Sprawozdanie

Sprawozdanie składa się samo z Twoich pomiarów, wykresów, odpowiedzi i wniosków. Uzupełnij brakujące elementy, a potem wydrukuj je albo zapisz jako PDF.

SPRAWOZDANIE

W lekcji online sprawozdanie składa się samo z pomiarów, wykresów, wyników i wniosków (przycisk „Drukuj / zapisz PDF"). Jeśli pracujesz na papierze, dołącz do niego wypełnione karty pomiarów, wykresy i wyniki z każdego zadania.