Technologie kwantowe · QUBIT · Aparat matematyczny fizyki kwantowej · Moduł 05

INSTRUKCJA LABORATORYJNA

Macierze

Ćwiczenie w arkuszu kalkulacyjnym: iloczyny, wyznaczniki, macierz odwrotna, układ równań i łańcuch Markowa.

WYDANIE	CZAS	ZADANIA	WYNIKI DO WPISANIA
23 listopada 2026	**ok. 60 min**	**4 + wnioski**	**27**

> W lekcji online wyniki wpisuje się w pola i od razu sprawdza. Na papierze wpisz je w puste miejsca, a formuły zapisz obok — przydadzą się do wniosków.

SPIS TREŚCI

1. Przygotowanie
2. Zadanie 1. Iloczyny w piekarni
3. Zadanie 2. Wyznacznik i macierz odwrotna
4. Zadanie 3. Układ równań
5. Zadanie 4. Łańcuch Markowa
6. Wnioski

CEL ĆWICZENIA

- policzyć w arkuszu kalkulacyjnym iloczyny macierzy: zapotrzebowanie na surowce, przychód i koszt,
- wyznaczyć wyznacznik i macierz odwrotną i odtworzyć z nich plan produkcji,
- rozwiązać układ trzech równań dwiema metodami i rozpoznać układ osobliwy,
- policzyć kolejne kwartały łańcucha Markowa i jego stan równowagi.

Przygotowanie

ZANIM ZACZNIESZ

- Pobierz plik **Arkusz do ćwiczenia** (przycisk w panelu obok) i otwórz go w Excelu, Arkuszach Google albo LibreOffice Calc. Każde zadanie ma własną kartę arkusza.
- Pola fioletowe i pomarańczowe to dane, a zielone — miejsca na wyniki. Wyniki licz formułami, nie przepisuj liczb.
- Potrzebne funkcje (polski Excel / wersja angielska i Arkusze Google): `MACIERZ.ILOCZYN` / `MMULT` — iloczyn, `WYZNACZNIK.MACIERZY` / `MDETERM` — wyznacznik, `MACIERZ.ODW` / `MINVERSE` — macierz odwrotna. W LibreOffice nazwy mogą się różnić — podpowie je kreator funkcji (Ctrl+F2).
- W nowym Excelu i w Arkuszach Google wynik macierzowy sam wypełnia sąsiednie komórki. W starszym Excelu zaznacz najpierw cały zakres wyniku, wpisz formułę i zatwierdź klawiszami **Ctrl+Shift+Enter**.
- W polskiej wersji argumenty oddziela średnik (`;`), w angielskiej — przecinek.
- Po każdym punkcie wpisz wynik w pole poniżej i kliknij **Sprawdź**. Ułamki wpisuj dziesiętnie (przecinek albo kropka).

Zadanie 1. Iloczyny w piekarni

Karta **Piekarnia**. Plan produkcji A jest w zakresie B6:D7, normy zużycia B — w G6:H8, ceny partii p — w K6:K8, a ceny surowców q — w N6:N7.

1. **Zapotrzebowanie.** Zaznacz pierwszą zieloną komórkę zakresu B13:C14 i wpisz `=MACIERZ.ILOCZYN(B6:D7; G6:H8)`. Sprawdź, czy wynik ma wymiar 2×2 — tak, jak przewiduje zasada wymiarów.
   - **mąka, poniedziałek** _____ **kg**
   - **masło, poniedziałek** _____ **kg**
   - **mąka, wtorek** _____ **kg**
   - **masło, wtorek** _____ **kg**
2. **Przychód.** W G13:G14 policz Ap: `=MACIERZ.ILOCZYN(B6:D7; K6:K8)`.
   - **przychód w poniedziałek** _____ **zł**
   - **przychód we wtorek** _____ **zł**
3. **Koszt surowców.** W K13:K14 pomnóż zapotrzebowanie z punktu 1 przez ceny surowców.
   - **koszt surowców w poniedziałek** _____ **zł**
   - **koszt surowców we wtorek** _____ **zł**
4. W wolnym miejscu arkusza wpisz `=MACIERZ.ILOCZYN(G6:H8; B6:D7)`. Jaki wymiar ma wynik i dlaczego nie odpowiada na pytanie o zapotrzebowanie?

Zadanie 2. Wyznacznik i macierz odwrotna

Karta **Odwrotna**. Macierz M w B6:C7 to zużycie mąki i masła na partię bułek i rogali, a wektor c w F6:F7 — łączne zużycie surowców. Szukamy planu x, dla którego $Mx = c$.

1. **Wyznacznik.** W B9 wpisz `=WYZNACZNIK.MACIERZY(B6:C7)`.
   - **det M** _____
2. **Macierz odwrotna.** W B13:C14 wpisz `=MACIERZ.ODW(B6:C7)`. Porównaj wynik z trikiem „trzy ruchy” z notatek.
   - **element (1, 1) macierzy M⁻¹** _____
   - **element (1, 2) macierzy M⁻¹** _____
3. **Plan produkcji.** W F13:F14 policz $x = M^{-1}c$ funkcją `MACIERZ.ILOCZYN`.
   - **partie bułek** _____
   - **partie rogali** _____
4. **Sprawdzenie.** W B18:C19 policz MM^{-1}. Powinna wyjść macierz jednostkowa — drobne liczby typu 10^{-17} to tylko błędy zaokrągleń arkusza.

Zadanie 3. Układ równań

Karta **Układ**. Macierz współczynników układu z notatek jest w B6:D8, a wyrazy wolne — w G6:G8.

1. W B10 policz $\det A$.
   - **det A** _____
2. **Metoda macierzy odwrotnej.** W B14:B16 policz $x = A^{-1}b$ jedną formułą: `=MACIERZ.ILOCZYN(MACIERZ.ODW(B6:D8); G6:G8)`.
   - **x** _____
   - **y** _____
   - **z** _____
3. **Wzory Cramera.** W F14:H16 zbuduj macierz A_y: skopiuj A i zastąp kolumnę y kolumną b. W F18 policz jej wyznacznik i sprawdź, że $\det A_y / \det A$ daje to samo y.
   - **det A_y** _____
4. **Układ osobliwy.** W B22:D24 jest macierz współczynników układu z rozdziału o rzędzie. W B25 policz jej wyznacznik, a obok spróbuj policzyć `MACIERZ.ODW`. Arkusz zwróci błąd (`#LICZBA!` albo `#NUM!`).
   - **wyznacznik macierzy osobliwej** _____

Zadanie 4. Łańcuch Markowa

Karta **Markow**. Macierz przejść P (kwartał na rynku pracy) jest w B6:D8, a udziały na początku π_0 — w G6:I6.

1. **Jeden kwartał.** W B12:D12 policz $\pi_1 = \pi_0 P$. Wektor wierszowy stoi z lewej strony macierzy.
   - **udział pracujących po kwartale** _____
   - **udział bezrobotnych po kwartale** _____
2. **Dwa kwartały naraz.** W G12:I14 policz P^2.
   - **prawdopodobieństwo: bezrobotny → pracujący w dwa kwartały** _____
3. **Osiem kwartałów.** Zamiast mnożyć osiem razy, podnoś do kwadratu: $P^4 = P^2 P^2$, $P^8 = P^4 P^4$. W B18:D18 policz $\pi_8 = \pi_0 P^8$. Podaj wyniki z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.
   - **udział pracujących po 8 kwartałach** _____
   - **udział bezrobotnych po 8 kwartałach** _____
4. **Stan równowagi.** Zbuduj układ z notatek: dwa pierwsze równania $\pi P = \pi$ przenieś na jedną stronę, a trzecie zastąp warunkiem $\pi_P + \pi_B + \pi_N = 1$. Rozwiąż go macierzą odwrotną i wpisz wynik w G18:I18.
   - **udział pracujących w równowadze** _____
   - **udział bezrobotnych w równowadze** _____
   - **udział biernych zawodowo w równowadze** _____

Wnioski

> **DO SPRAWOZDANIA**
>
> Odpowiedz krótko na trzy pytania:
>
> 1. Dlaczego `MACIERZ.ODW` zwraca błąd dla macierzy z zadania 3.4? Co mówi o tym układzie twierdzenie Kroneckera–Capellego?
> 2. Która metoda rozwiązania układu z zadania 3 wymagała mniej formuł i kiedy wzory Cramera przestają być wygodne?
> 3. Porównaj π_8 ze stanem równowagi. Co by się stało, gdyby na początku pracowało 70% populacji?