NOTATKI

Macierze

Od tabeli liczb do układów równań: działania, przekształcenia płaszczyzny, wyznacznik, macierz odwrotna, rząd i zastosowania w ekonomii i analizie danych.

WYDANIE	CZAS CZYTANIA	ANIMACJE	RYSUNKI	TRIKI
23 listopada 2026	**ok. 34 min**	**7 + 1 film**	**9**	**24**

SPIS TREŚCI

1. Macierz i jej elementy
2. Dodawanie, mnożenie przez liczbę i transpozycja
3. Mnożenie macierzy
4. Macierz jako przekształcenie płaszczyzny
5. Wyznacznik
6. Macierz odwrotna
7. Układy równań liniowych
8. Rząd macierzy i liczba rozwiązań
9. Zastosowania
10. Podsumowanie
11. Słowniczek

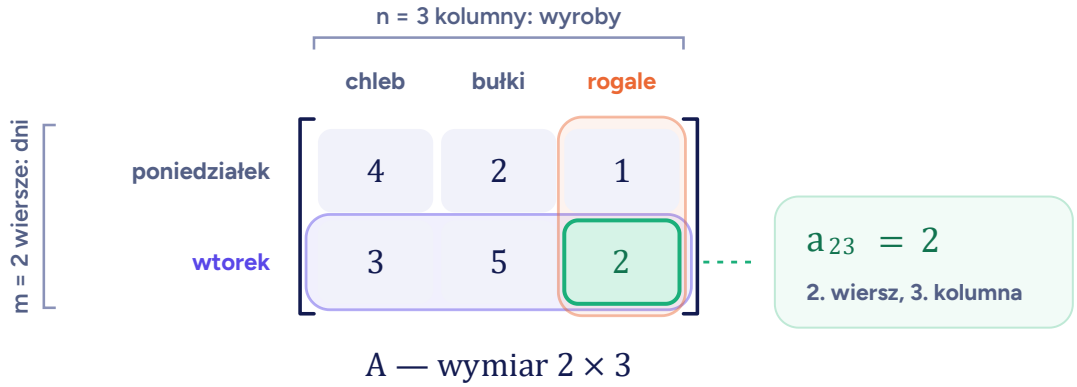
PO TEJ LEKCJI POTRAFISZ

- odczytać macierz jako tabelę danych i wykonać na niej dodawanie, mnożenie przez liczbę i transpozycję,
- sprawdzić, czy iloczyn macierzy istnieje, i obliczyć go metodą „wiersz razy kolumna”,
- odczytać macierz 2×2 jako przekształcenie płaszczyzny,
- obliczyć wyznacznik macierzy 2×2 i 3×3 oraz wyjaśnić jego sens geometryczny,
- wyznaczyć macierz odwrotną i rozwiązać równanie macierzowe,
- rozwiązać układ równań wzorami Cramera i eliminacją Gaussa,
- określić liczbę rozwiązań układu na podstawie twierdzenia Kroneckera–Capellego,
- zastosować macierze w łańcuchu Markowa, modelu Leontiefa i regresji liniowej.

Macierz i jej elementy

Macierz to prostokątna tablica liczb. W praktyce prawie zawsze jest tabelą danych: każdy wiersz opisuje jeden obiekt albo jedną obserwację, a każda kolumna — jedną cechę.

Przykład, który będzie wracał w całej lekcji: piekarnia planuje produkcję na dwa dni. Wiersze to dni, kolumny to wyroby, a liczby to partie do wypieku.

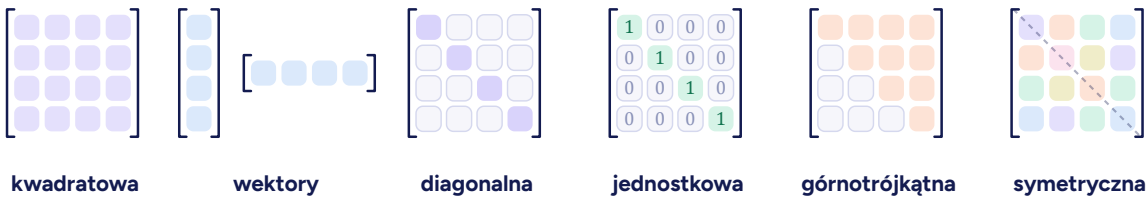


Rys. 1. Macierz A jako tabela danych: wiersze to dni, kolumny to wyroby. Element a_{23} stoi w 2. wierszu i 3. kolumnie — we wtorek piekarnia wypieka 2 partie rogali.

Macierz o m wierszach i n kolumnach ma **wymiar** $m \times n$ (czytamy „m na n"). Macierz A ma wymiar 2×3. Element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie oznaczamy a_{ij}.

> **TRIK** | **Najpierw wiersz, potem kolumna**
>
> W wymiarze $m \times n$ i w indeksie a_{ij} obowiązuje ta sama kolejność: najpierw wiersz, potem kolumna. a_{23} to 2. wiersz i 3. kolumna — nigdy odwrotnie.

Niektóre układy liczb powtarzają się tak często, że mają własne nazwy.



Rys. 2. Najczęściej spotykane rodzaje macierzy. Kolorem zaznaczono miejsca, w których mogą stać liczby różne od zera; w macierzy symetrycznej ten sam odcień oznacza te same liczby.

- **Macierz kwadratowa** ma tyle samo wierszy co kolumn. Elementy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tworzą jej **przekątną**.
- **Wektor** to macierz o jednej kolumnie (wektor kolumnowy) albo o jednym wierszu (wektor wierszowy).
- **Macierz diagonalna** ma poza przekątną same zera, a **macierz jednostkowa** I — dodatkowo same jedynki na przekątnej.
- **Macierz trójkątna** ma same zera pod przekątną (górnotrójkątna) albo nad nią (dolnotrójkątna).
- **Macierz symetryczna** spełnia $a_{ij} = a_{ji}$: przekątna działa w niej jak lustro.

SPRAWDŹ SIĘ | **Wymiar i element**

Macierz B ma 4 wiersze i 2 kolumny. Jaki ma wymiar i ile ma elementów? Czy istnieje element b_{32}? A b_{23}?

ROZWIĄZANIE

Wymiar 4×2, czyli $4 \cdot 2 = 8$ elementów. Element b_{32} istnieje (3. wiersz, 2. kolumna). Elementu b_{23} nie ma, bo B ma tylko dwie kolumny.

Dodawanie, mnożenie przez liczbę i transpozycja

Piekarnia ma dwa zakłady: przy rynku (A_1) i na osiedlu (A_2). Oba planują produkcję w tym samym układzie tabeli — dni w wierszach, wyroby w kolumnach. Plan całej firmy to suma planów:

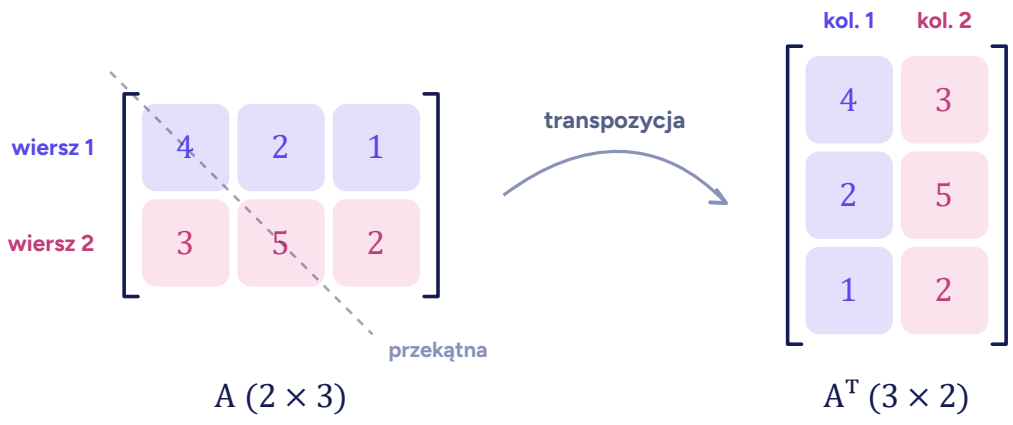
$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierze dodajemy **element po elemencie**: liczba z miejsca (i, j) pierwszej macierzy plus liczba z tego samego miejsca drugiej, np. $a_{11} = 3 + 1 = 4$. Dlatego dodawać można tylko macierze tego samego wymiaru — każdy element musi mieć swoją parę.

Mnożenie przez liczbę mnoży każdy element. Ceny sprzedaży partii chleba, bułek i rogali (w złotych) zapisujemy w wektorze p. Podwyżka o 10% to pomnożenie go przez $1{,}1$:

$$1{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 240 \\ 160 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 264 \\ 176 \\ 330 \end{bmatrix}$$

Transpozycja zamienia wiersze z kolumnami: pierwszy wiersz A staje się pierwszą kolumną macierzy transponowanej A^T, drugi — drugą kolumną. Element a_{ij} przechodzi na miejsce (j, i).



Rys. 3. Transpozycja odbija macierz względem przekątnej: wiersze dni stają się kolumnami. Macierz 2×3 przechodzi w macierz 3×2, a elementy przekątnej zostają na miejscu.

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

TRIK | **Transpozycja to odbicie względem przekątnej**

Elementy przekątnej zostają na miejscu, pozostałe zamieniają się parami: $a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$. Wymiar $m \times n$ przechodzi w $n \times m$, a podwójna transpozycja przywraca macierz: $(A^T)^T = A$.

CZĘSTY BŁĄD | **Dodawanie macierzy różnych wymiarów**

Sumy $A + A^T$ nie da się obliczyć: A ma wymiar 2×3, a A^T — 3×2. Brakujących miejsc nie uzupełnia się zerami — takie działanie po prostu nie istnieje.

SPRAWDŹ SIĘ | **Plan po zmianie**

Zakład na osiedlu podwaja produkcję, a zakład przy rynku zostaje przy swoim planie. Zapisz plan firmy jednym działaniem i oblicz go.

ROZWIĄZANIE

Nowy plan to $A_1 + 2A_2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Na przykład bułek w poniedziałek będzie 3 partie.

Mnożenie macierzy

Do planu produkcji dochodzą normy zużycia: ile kilogramów mąki i masła potrzeba na jedną partię każdego wyrobu. W macierzy B wiersze to wyroby, a kolumny to surowce:

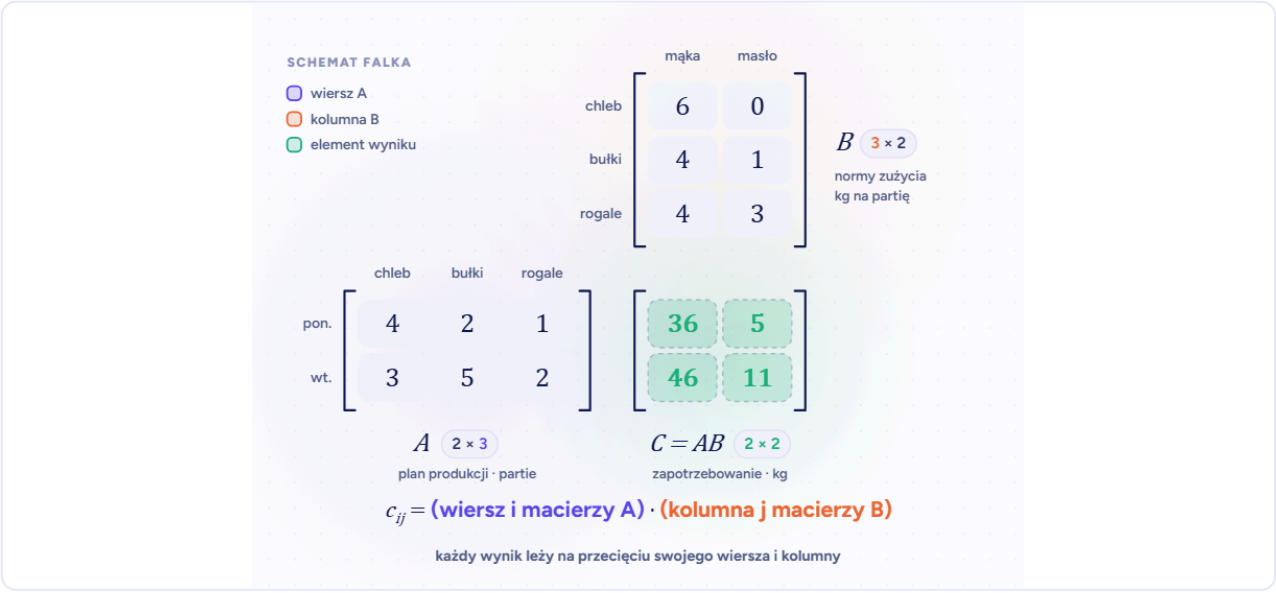
$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ile mąki trzeba w poniedziałek? Każdy wyrób dokłada swoją część: liczba partii razy zużycie mąki na partię. Przechodzimy więc jednocześnie **wiersz poniedziałku** w A i **kolumnę mąki** w B, mnożymy pary liczb i dodajemy wyniki. Iloczyn macierzy AB robi to naraz dla każdego dnia i każdego surowca.



Film 1. Od dwóch tabel piekarni do iloczynu macierzy: wspólny wymiar — wyroby — znika, a wynikiem jest nowa tabela: zapotrzebowanie na surowce w każdym dniu. **Film jest w lekcji online.**

Wiersz razy kolumna



C = AB to zapotrzebowanie na surowce w każdym dniu. Każdy element wyniku leży na przecięciu swojego wiersza i kolumny — to schemat Falka.

Animacja 1. Iloczyn macierzy na schemacie Falka. Każdy element wyniku powstaje z jednego wiersza A i jednej kolumny B; przyciskami kroków przejdziesz element po elemencie. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

Element wyniku w i-tym wierszu i j-tej kolumnie to suma iloczynów odpowiadających sobie elementów i-tego wiersza A i j-tej kolumny B:

$$c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \cdots + a_{in}\,b_{nj}$$

Dla piekarni pierwszy element i cały iloczyn:

$$c_{11} = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 24 + 8 + 4 = 36$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 5 \\ 46 & 11 \end{bmatrix}$$

TRIK | **Zasada wymiarów**

$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$. Wymiary wewnętrzne muszą być równe, a wynik ma wymiary zewnętrzne. W piekarni 2×3 razy 3×2 daje 2×2 — wyroby „znikają", zostają dni i surowce.

TRIK | **Schemat Falka**

Zapisz B nad miejscem na wynik, a A po jego lewej stronie. Każdy element wyniku leży na przecięciu swojego wiersza (z A) i swojej kolumny (z B), więc nie trzeba pilnować indeksów.

CZĘSTY BŁĄD | **Mnożenie element po elemencie**

Iloczyn macierzy to nie mnożenie liczb stojących na tych samych miejscach: $c_{11} \neq a_{11}\, b_{11}$. Element c_{11} to suma iloczynów **całego** pierwszego wiersza A i **całej** pierwszej kolumny B.

SPRAWDŹ SIĘ | **Zapotrzebowanie we wtorek**

Policz element c_{21}. Co oznacza w zadaniu piekarni?

ROZWIĄZANIE

$$c_{21} = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 18 + 20 + 8 = 46$$

To zapotrzebowanie na mąkę we wtorek: 46 kg.

Macierz razy wektor

Wektor to macierz o jednej kolumnie, więc mnożymy go tak samo: wiersz razy kolumna. Plan razy wektor cen partii daje przychód w każdym dniu:

$$A\,p = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240 \\ 160 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1580 \\ 2120 \end{bmatrix}$$

Koszt surowców liczymy podobnie. Mąka kosztuje 3 zł/kg, a masło 28 zł/kg. Można najpierw policzyć zapotrzebowanie AB, a potem pomnożyć je przez ceny q — albo najpierw koszt surowców jednej partii każdego wyrobu, Bq, a dopiero potem pomnożyć przez plan:

$$(AB)\,q = \begin{bmatrix} 36 & 5 \\ 46 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248 \\ 446 \end{bmatrix} \qquad A\,(Bq) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 40 \\ 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248 \\ 446 \end{bmatrix}$$

Wynik jest ten sam. Pośredni wektor Bq też ma znaczenie: surowce na partię chleba, bułek i rogali kosztują 18, 40 i 96 zł.

TRIK | **Łączność**

$(AB)\,C = A\,(BC)$: nawiasy wolno przestawiać, czynników — nie. Wybierz kolejność z mniejszą liczbą rachunków: tu $A\,(Bq)$ wymaga 12 mnożeń liczb, a $(AB)\,q$ — 16.

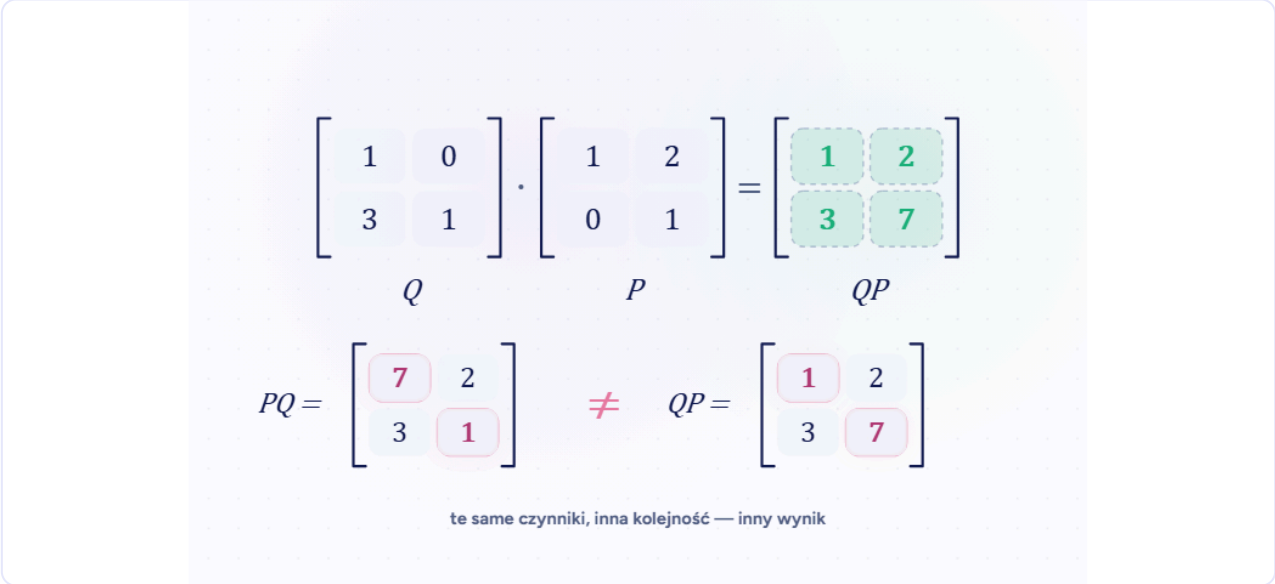
TRIK | **Iloczyn w arkuszu kalkulacyjnym**

Pojedynczy element iloczynu, czyli suma iloczynów par, to funkcja `SUMA.ILOCZYNÓW` (ang. `SUMPRODUCT`). Cały iloczyn macierzy liczy jedna formuła `MACIERZ.ILOCZYN` (ang. `MMULT`).

Kolejność ma znaczenie

Dla liczb $ab = ba$. Dla macierzy ta reguła nie działa — to najważniejsza różnica między liczbami a macierzami. Możliwe są trzy sytuacje:

1. **Istnieje tylko jedna kolejność.** $A\,p$ ma wymiar 2×1, a $p\,A$ nie istnieje: $(3 \times 1) \cdot (2 \times 3)$.
2. **Istnieją obie, ale mają różne wymiary.** AB ma wymiar 2×2, a BA — 3×3.
3. **Istnieją obie, mają ten sam wymiar — a mimo to są różne.** Tak bywa nawet dla macierzy 2×2.



PQ ≠ QP: ta sama reguła, ale inne wiersze i kolumny. Dwa elementy się zgadzają, dwa nie — macierze są różne.

Animacja 2. Te same dwie macierze w odwrotnej kolejności. Iloczyn liczymy tak samo, ale z innych wierszy i kolumn — i wychodzi inna macierz. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

$$PQ = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} \qquad QP = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$$

CZĘSTY BŁĄD | **Wzory skróconego mnożenia**

$(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2$, a nie $P^2 + 2PQ + Q^2$, bo PQ i QP zwykle się różnią. Dla macierzy z animacji:

$$(P+Q)^2 = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \qquad P^2 + 2PQ + Q^2 = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

TRIK | **Odwrotna kolejność przy transpozycji**

$(AB)^T = B^T A^T$: transponując iloczyn, zamieniasz kolejność czynników. Zasada wymiarów pokazuje, że inaczej się nie da — B^T ma wymiar 2×3, a A^T — 3×2.

Macierz jednostkowa i potęgi

Wśród liczb czynnikiem, który niczego nie zmienia, jest 1. Wśród macierzy tę rolę pełni **macierz jednostkowa** I: kwadratowa, z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią. Dla macierzy A o wymiarze $m \times n$ zachodzi $I_m A = A$ i $A\, I_n = A$:

$$I_2\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Potęga macierzy kwadratowej to iloczyn jej kopii: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$. Potęgi wrócą w łańcuchach Markowa, gdzie P^k opisuje zmiany po k okresach.

TRIK | **Macierz jednostkowa działa jak 1**

I niczego nie zmienia, ale jej wymiar dobierasz do strony: z lewej I_m (tyle, ile wierszy ma A), z prawej I_n (tyle, ile kolumn).

SPRAWDŹ SIĘ | **Dwie kolejności**

Macierz A ma wymiar 2×3, a B — 3×2. Jakie wymiary mają AB i BA? Czy te macierze mogą być równe?

ROZWIĄZANIE

AB ma wymiar 2×2, a BA — 3×3. Macierze o różnych wymiarach nie mogą być równe.

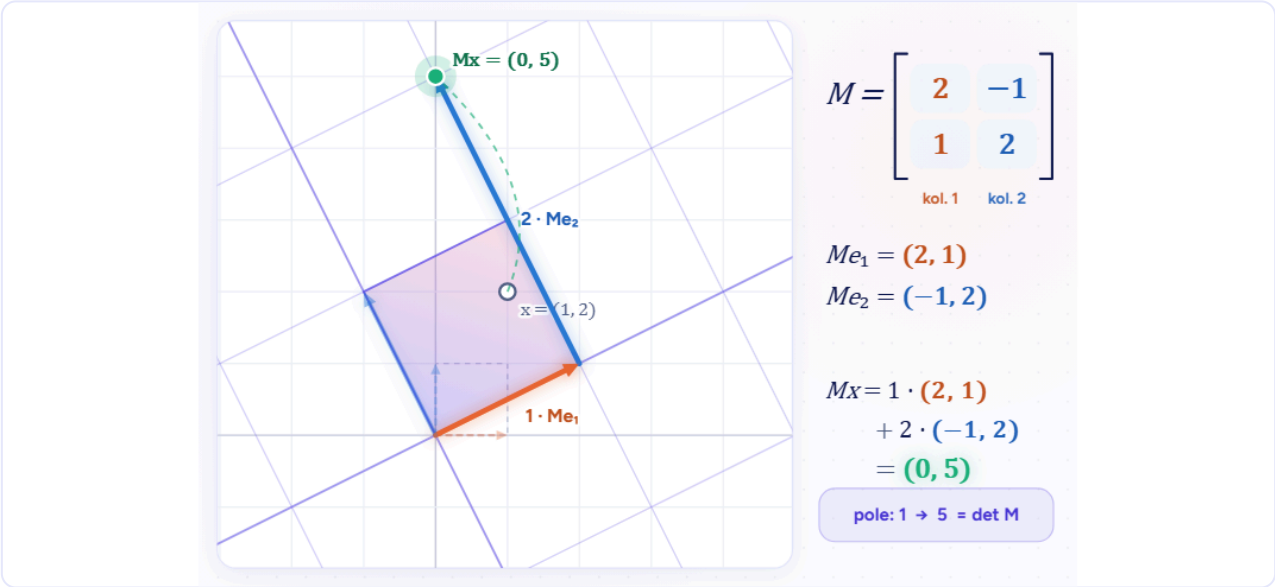
Macierz jako przekształcenie płaszczyzny

Macierz 2×2 można czytać nie tylko jako tabelę, ale też jako **przekształcenie płaszczyzny**: każdy punkt (wektor) $x = (x_1, x_2)$ przechodzi w punkt Mx. Weźmy

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Jak zobaczyć, co robi M? Wystarczą dwa wektory: $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$. Mnożąc, dostajemy dokładnie kolumny macierzy:

$$Me_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Me_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Mx = (0, 5). Kwadrat jednostkowy przeszedł w równoległobok o polu 5 — to wyznacznik macierzy M.

Animacja 3. Macierz M przekształca całą płaszczyznę. Wektor e_1 trafia w pierwszą kolumnę M, a e_2 — w drugą; reszta siatki podąża za nimi. Punkt $x = (1, 2)$ trafia w $1\cdot$ (pierwsza kolumna) $+\ 2\cdot$ (druga kolumna). **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

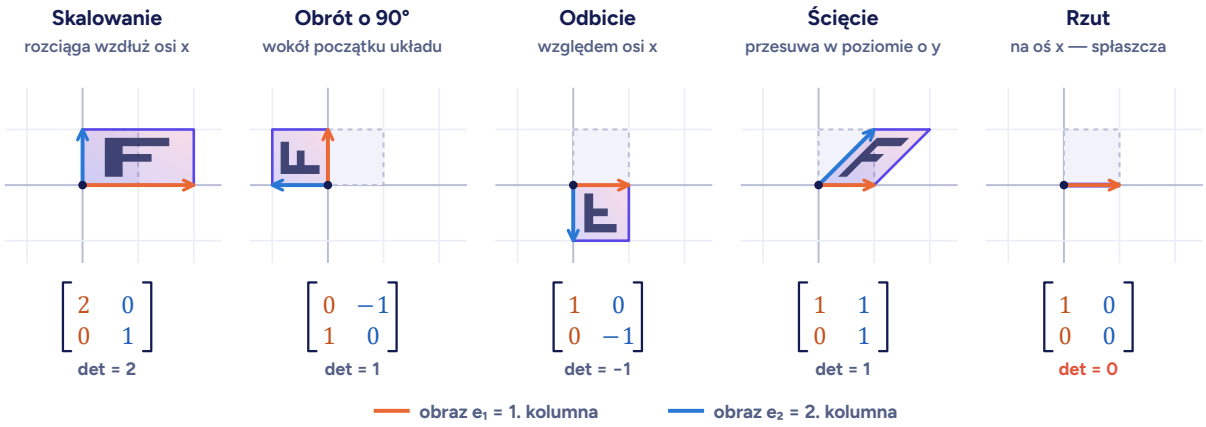
TRIK | **Kolumny to obrazy wektorów bazowych**

Pierwsza kolumna macierzy pokazuje, dokąd trafia e_1, a druga — dokąd trafia e_2. Z dwóch strzałek odczytasz całe przekształcenie, a z przekształcenia — macierz.

Każdy wektor jest kombinacją wektorów bazowych: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Dlatego Mx to ta sama kombinacja kolumn:

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Proste przechodzą w proste, a siatka kwadratów — w siatkę jednakowych równoległoboków. Tak wyglądają podstawowe przekształcenia:



Rys. 4. Pięć podstawowych przekształceń płaszczyzny. Szary kwadrat to kwadrat jednostkowy przed przekształceniem, kolorowy równoległobok — jego obraz. Litera F pokazuje, czy obraz jest odbity.

Złożenie przekształceń to iloczyn macierzy. Wyrażenie ABx czytamy od prawej: najpierw na x działa B, potem A. Weźmy obrót o 90° R i rozciągnięcie wzdłuż osi x S:

$$RS = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad SR = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

To geometryczny powód, dla którego $AB \neq BA$: obrócić, a potem rozciągnąć, to co innego niż rozciągnąć, a potem obrócić.

TRIK | **Złożenie czytamy od prawej**

W ABx na wektor x najpierw działa macierz stojąca tuż przy nim, czyli B, a dopiero potem A — tak jak przy funkcjach złożonych $f(g(x))$.

SPRAWDŹ SIĘ | **Obrót o 180°**

Zapisz macierz obrotu płaszczyzny o 180° wokół początku układu.

ROZWIĄZANIE

Obrót o 180° wysyła $e_1 = (1, 0)$ w $(-1, 0)$, a $e_2 = (0, 1)$ w $(0, -1)$. Te obrazy to kolumny macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

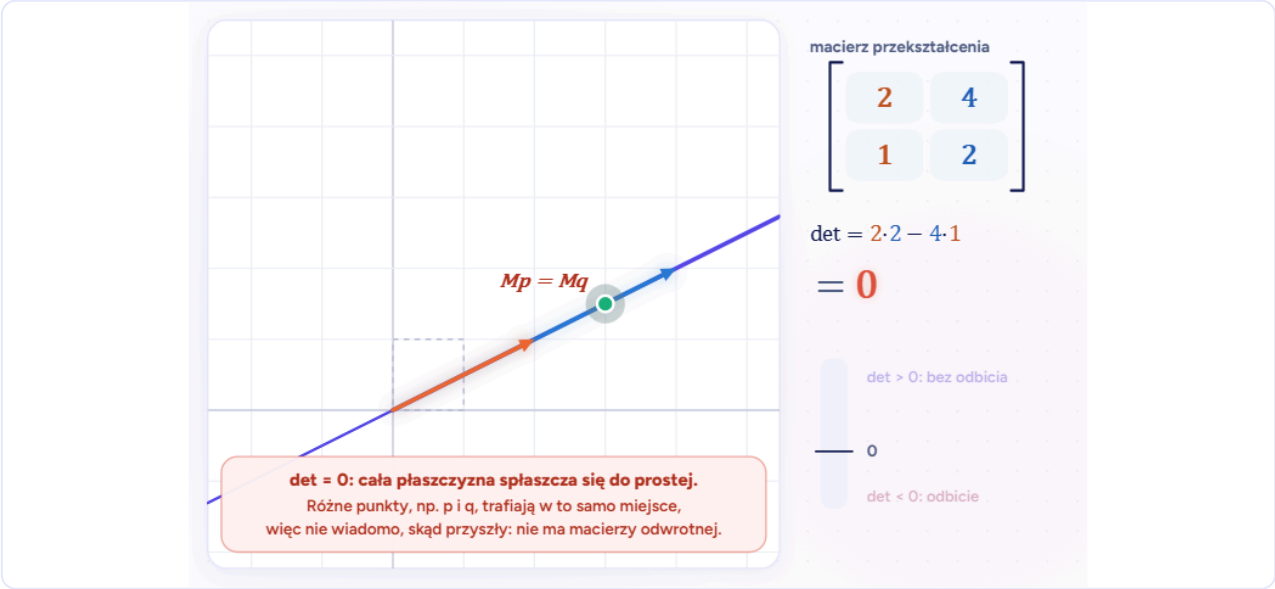
Wyznacznik

Wyznacznik to liczba przypisana macierzy kwadratowej, oznaczana $\det A$ albo $|A|$. Mówi, ile razy przekształcenie zmienia pola (w trzech wymiarach — objętości), czy odbija płaszczyznę i czy da się je odwrócić.

Macierz 2 × 2

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Kwadrat jednostkowy o polu 1 przechodzi w równoległobok rozpięty na kolumnach macierzy. Pole tego równoległoboku to $|\det A|$, a znak mówi, czy przekształcenie zachowuje orientację (plus), czy odbija płaszczyznę (minus).



Kolumny stają się równoległe i cała płaszczyzna spłaszcza się do prostej: **det = 0**. Punkty *p* i *q* trafiają w to samo miejsce (*Mp* = *Mq*), więc patrząc na wynik, nie da się ustalić, z którego z nich pochodzi. Dlatego macierz o wyznaczniku 0 nie ma odwrotnej.

Animacja 4. Kwadrat jednostkowy przechodzi w równoległobok rozpięty na kolumnach macierzy. Jego pole to $|\det|$; ujemny wyznacznik oznacza odbicie, a zerowy — spłaszczenie płaszczyzny do prostej. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

Dla macierzy M z poprzedniego rozdziału:

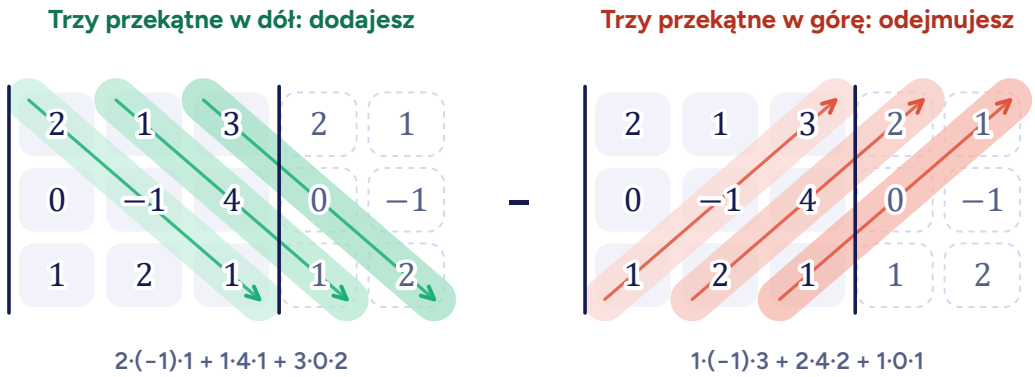
$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 4 + 1 = 5$$

Każda figura po przekształceniu ma pole 5 razy większe.

TRIK | **Przekątna minus druga przekątna**

W $ad - bc$ od iloczynu na przekątnej (od lewego górnego rogu) odejmujesz iloczyn na drugiej przekątnej.

Macierz 3 × 3: schemat Sarrusa



Rys. 5. Schemat Sarrusa: dopisz dwie pierwsze kolumny z prawej strony. Iloczyny wzdłuż trzech przekątnych w dół (zielone) dodajesz, wzdłuż trzech przekątnych w górę (czerwone) — odejmujesz.

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 1$$

$$= (-2+4+0) - (-3+16+0) = 2 - 13 = -11$$

CZĘSTY BŁĄD **Sarrus tylko dla 3 × 3**

Schemat Sarrusa działa wyłącznie dla macierzy 3×3. Dla 4×4 „przekątne" dają zły wynik — wtedy stosuje się rozwinięcie Laplace'a albo sprowadzenie macierzy do postaci trójkątnej.

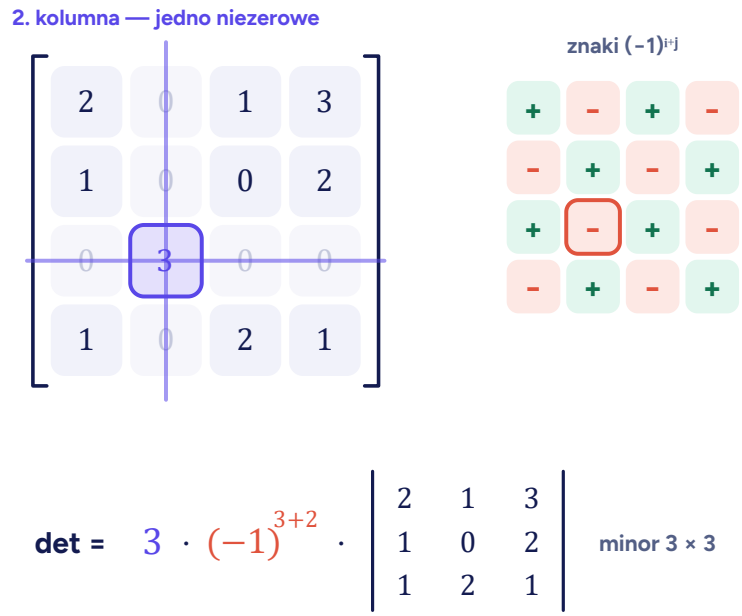
Rozwinięcie Laplace'a

Wyznacznik dowolnego stopnia sprowadzamy do wyznaczników mniejszych. Wybieramy jeden wiersz (albo jedną kolumnę) i każdy jego element mnożymy przez jego **dopełnienie algebraiczne**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

gdzie **minor** M_{ij} to wyznacznik macierzy bez i-tego wiersza i j-tej kolumny. Wyznacznik to suma tych iloczynów:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$



Rys. 6. Rozwinięcie Laplace'a wzdłuż 2. kolumny. Jej jedyny niezerowy element skreśla swój wiersz i kolumnę, a znak bierze z szachownicy. Zamiast czterech wyznaczników 3×3 zostaje jeden.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{3}$$

TRIK | **Rozwijaj tam, gdzie są zera**

Wybierz wiersz albo kolumnę z największą liczbą zer — każde zero kasuje jeden składnik. Znak $(-1)^{i+j}$ odczytasz z szachownicy: plus w lewym górnym rogu, dalej na przemian.

Własności wyznacznika

- $\det A^T = \det A$, więc to, co działa dla wierszy, działa też dla kolumn.
- Zamiana dwóch wierszy zmienia znak wyznacznika.
- Wiersz zer albo dwa proporcjonalne wiersze dają $\det A = 0$.
- Dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza **nie zmienia** wyznacznika.
- Wyznacznik macierzy trójkątnej to iloczyn elementów przekątnej.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ — skale pól się mnożą.

TRIK | **Sprowadź do trójkąta**

Dodawaj do wierszy wielokrotności innych wierszy, aż pod przekątną będą same zera. Wyznacznik się nie zmienia, a dla macierzy trójkątnej to po prostu iloczyn przekątnej. Przy zamianie wierszy pamiętaj o zmianie znaku.

CZĘSTY BŁĄD | **Wyznacznik wielokrotności macierzy**

$\det(2A) \neq 2\det A$. Mnożąc macierz przez liczbę, mnożysz każdy z n wierszy, więc $\det(kA) = k^n \det A$. Dla macierzy 2×2: $\det(2A) = 4\det A$ — geometrycznie: dwukrotne powiększenie zwiększa pole czterokrotnie.

SPRAWDŹ SIĘ | **Wyznacznik i pole**

Oblicz $\det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. Jak przekształcenie zmienia pola figur?

ROZWIĄZANIE

$5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1$. Pola się nie zmieniają, choć kształty — tak, a orientacja zostaje zachowana.

Macierz odwrotna

Wśród liczb każda $a \neq 0$ ma odwrotność a^{-1}, dla której $a \cdot a^{-1} = 1$. Macierz kwadratowa A ma **macierz odwrotną** A^{-1}, jeśli

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Geometrycznie A^{-1} cofa przekształcenie A. Odwrotna istnieje dokładnie wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Gdy wyznacznik jest zerem, płaszczyzna spłaszcza się do prostej, a różne punkty trafiają w to samo miejsce (zob. animację w rozdziale „Wyznacznik"). Patrząc na wynik, nie da się więc ustalić, z którego punktu się wyszło — przekształcenia nie da się cofnąć. Taką macierz nazywamy **osobliwą**.

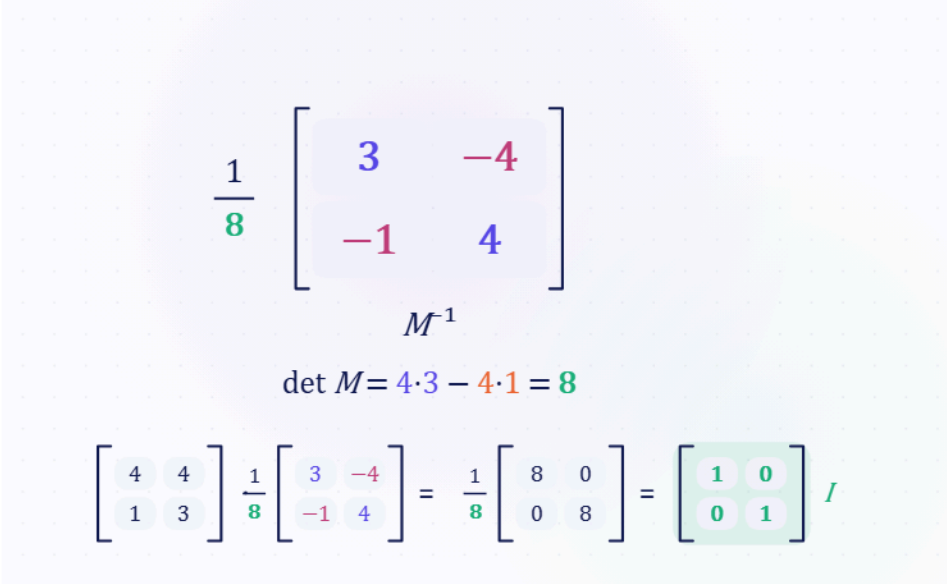
TRIK | **Wyznacznik zero działa jak dzielenie przez zero**

Liczba 0 nie ma odwrotności — macierz o wyznaczniku 0 też nie. Zanim zaczniesz liczyć A^{-1}, policz $\det A$.

Macierz odwrotna 2 × 2

Zadanie odwrotne w piekarni: wiadomo, ile surowców zużyto na bułki i rogale — ile partii upieczono? Zużycie mąki i masła to Mx, gdzie x to liczby partii bułek i rogali, a kolumny M to normy zużycia tych wyrobów:

$$Mx = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 13 \end{bmatrix}$$



Sprawdzenie: M razy otrzymana macierz daje macierz jednostkową — **to jest M⁻¹**.

Animacja 5. Macierz odwrotna 2×2 w trzech ruchach: elementy przekątnej zamieniają się miejscami, pozostałe zmieniają znak, a całość dzielimy przez wyznacznik. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

$$\det M = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Mnożąc zużycie przez M^{-1}, odzyskujemy plan:

$$x = M^{-1}\begin{bmatrix} 28 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 32 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Upieczono 4 partie bułek i 3 partie rogali.

TRIK | **Odwrotna 2 × 2 w trzech ruchach**

Zamień miejscami elementy przekątnej, zmień znaki dwóch pozostałych i podziel wszystko przez wyznacznik.

Metoda dopełnień algebraicznych

Dla większych macierzy

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(A^D)^T,$$

gdzie A^D to **macierz dopełnień algebraicznych**: na miejscu (i, j) stoi A_{ij} z rozwinięcia Laplace'a. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mamy $\det A = 1$ oraz na przykład

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T = (A^D)^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To samo daje eliminacja Gaussa–Jordana: zapisz obok siebie A i I i operacjami na wierszach sprowadź lewą część do I — po prawej powstanie A^{-1}.

CZĘSTY BŁĄD | **Brak transpozycji**

Dopełnienie A_{ij} trafia do A^{-1} na miejsce (j, i), a nie (i, j). Pominięcie transpozycji to najczęstszy błąd w tej metodzie. Wynik zawsze sprawdzaj mnożeniem: AA^{-1} musi dać I.

Równania macierzowe

W równaniu $AX = B$ niewiadomą jest macierz X. Mnożymy obie strony **z lewej** przez A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, czyli $X = A^{-1}B$. W równaniu $XA = B$ mnożymy **z prawej**: $X = BA^{-1}$.

TRIK | **Mnóż z tej strony, po której stoi A**

A^{-1} stawiasz po tej samej stronie, po której A stoi przy X — i to po obu stronach równania. Mnożenie macierzy nie jest przemienne, więc $A^{-1}B$ i BA^{-1} to zwykle różne macierze.

TRIK | **Odwrotność iloczynu**

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ — jak przy transpozycji, kolejność się odwraca. Złożenie cofamy od końca: jeśli na wektor najpierw działa B, a potem A, to cofając, najpierw usuwamy A.

SPRAWDŹ SIĘ | **Równanie XM = B**

Rozwiąż równanie $XM = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$, gdzie M to macierz norm z przykładu piekarni.

ROZWIĄZANIE

X stoi po lewej stronie M, więc mnożymy obie strony z prawej przez M^{-1}:

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Układy równań liniowych

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi zapisujemy krótko: $Ax = b$, gdzie A to macierz współczynników, x — wektor niewiadomych, a b — wektor wyrazów wolnych.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gdy A jest kwadratowa i $\det A \neq 0$, układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = A^{-1}b$. Odwrotności nie trzeba jednak liczyć — są szybsze metody.

Wzory Cramera

Niech A_k oznacza macierz A, w której k-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych b. Wtedy

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad \det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{7}{7} = 1 \qquad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{14}{7} = 2 \qquad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{21}{7} = 3$$

TRIK | **Wzory Cramera**

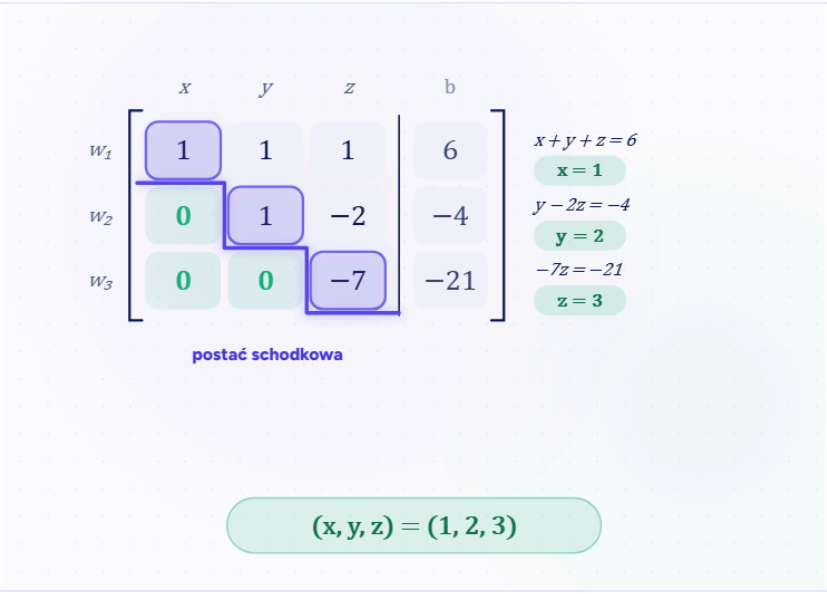
Zastąp k-tą kolumnę macierzy współczynników kolumną wyrazów wolnych i podziel wyznacznik nowej macierzy przez $\det A$. Działa tylko wtedy, gdy A jest kwadratowa i $\det A \neq 0$.

Eliminacja Gaussa

Układ zapisujemy jako **macierz rozszerzoną** $[A \mid b]$ i upraszczamy ją trzema **operacjami elementarnymi**:

1. zamiana dwóch wierszy,
2. pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
3. dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza.

Celem jest **postać schodkowa**: pod pierwszym niezerowym elementem każdego wiersza same zera.



Rozwiązanie: x = 1, y = 2, z = 3 — to samo co ze wzorów Cramera.

Animacja 6. Eliminacja Gaussa na macierzy rozszerzonej $[A \mid b]$: operacjami na wierszach zerujemy elementy pod przekątną, a potem odczytujemy niewiadome od dołu. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

$$\begin{bmatrix}1&1&1&6\\2&-1&1&3\\1&2&-1&2\end{bmatrix} \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&-3&-1&-9\\0&1&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_2\leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&-2&-4\\0&-3&-1&-9\end{bmatrix} \xrightarrow{w_3+3w_2} \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&-2&-4\\0&0&-7&-21\end{bmatrix}$$

Z ostatniego wiersza odczytujemy z, a potem, idąc w górę, kolejne niewiadome (**podstawianie wsteczne**):

$$\begin{aligned} -7z &= -21 &&\Rightarrow\ z = 3\\ y - 2z &= -4 &&\Rightarrow\ y = 2\\ x + y + z &= 6 &&\Rightarrow\ x = 1 \end{aligned}$$

TRIK | **Operacje elementarne nie zmieniają rozwiązań**

Każda operacja elementarna da się cofnąć, więc nowy układ ma dokładnie te same rozwiązania co wyjściowy. Możesz upraszczać śmiało — byle zawsze całe wiersze.

CZĘSTY BŁĄD | **Zapomniana kolumna wyrazów wolnych**

Każdą operację wykonujesz na całym wierszu macierzy rozszerzonej, także na liczbie za kreską. Wynik sprawdzaj podstawieniem do wszystkich równań wyjściowych.

SPRAWDŹ SIĘ | **Wzory Cramera dla dwóch równań**

Rozwiąż wzorami Cramera układ $2x + y = 7, x - y = -1$.

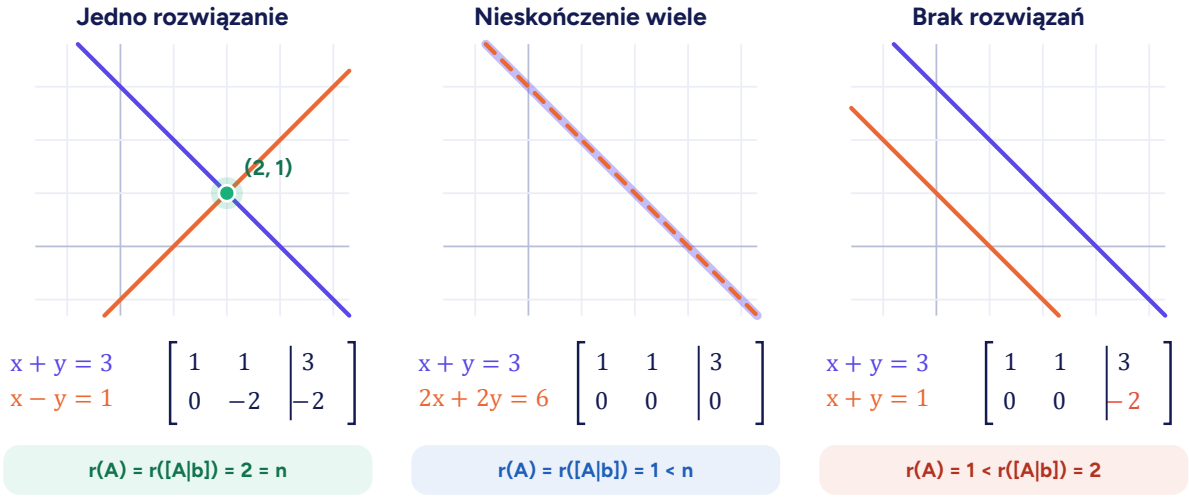
ROZWIĄZANIE

$$\det A = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 - 1 = -3 \qquad \det A_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

Stąd $x = \frac{-6}{-3} = 2$ i $y = \frac{-9}{-3} = 3$. Sprawdzenie: $2 \cdot 2 + 3 = 7$ i $2 - 3 = -1$.

Rząd macierzy i liczba rozwiązań

Nie każdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla dwóch równań z dwiema niewiadomymi widać to od razu, bo każde równanie to prosta na płaszczyźnie.



Rys. 7. Trzy możliwe przypadki dla dwóch równań z dwiema niewiadomymi: proste się przecinają (jedno rozwiązanie), pokrywają się (nieskończenie wiele) albo są równoległe (brak rozwiązań). Pod spodem — postać schodkowa macierzy rozszerzonej i rzędy.

Rząd macierzy $r(A)$ to liczba niezerowych wierszy w jej postaci schodkowej — czyli liczba naprawdę niezależnych równań. Rząd nie zależy od tego, jakimi operacjami elementarnymi dojdziemy do postaci schodkowej.

TWIERDZENIE KRONECKERA–CAPELLEGO

Układ $Ax = b$ z n niewiadomymi:

- ma **dokładnie jedno rozwiązanie**, gdy $r(A) = r([A \mid b]) = n$,
- ma **nieskończenie wiele rozwiązań** zależnych od $n - r$ parametrów, gdy $r(A) = r([A \mid b]) = r < n$,
- jest **sprzeczny**, czyli nie ma rozwiązań, gdy $r(A) < r([A \mid b])$.

Przykład: $x + 2y + z = 4, 2x + 4y + 3z = 9, x + 2y + 2z = 5$. Eliminacja daje

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz to równanie $0 = 0$ — trzecie równanie wynikało z dwóch pierwszych. Mamy $r(A) = r([A \mid b]) = 2$ przy $n = 3$ niewiadomych, więc rozwiązań jest nieskończenie wiele, z 1 parametrem. Za niewiadomą swobodną przyjmujemy $y = t$:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

TRIK | **Wiersz sprzeczności**

Wiersz $[\,0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \mid c\,]$ z $c \neq 0$ to równanie $0 = c$ — układ jest sprzeczny. Wiersz samych zer to równanie $0 = 0$, które niczego nie wnosi.

TRIK | **Liczba parametrów**

Niewiadomych jest n, niezależnych równań — r. Swobodnych niewiadomych zostaje $n - r$: tyle parametrów ma rozwiązanie.

SPRAWDŹ SIĘ | **Zmiana wyrazu wolnego**

W układzie z przykładu zmieniamy ostatnie równanie na $x + 2y + 2z = 6$. Ile rozwiązań ma teraz układ?

ROZWIĄZANIE

Te same operacje dają

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ostatni wiersz to $0 = 1$. Teraz $r(A) = 2$, ale $r([A \mid b]) = 3$, więc układ jest sprzeczny.

Zastosowania

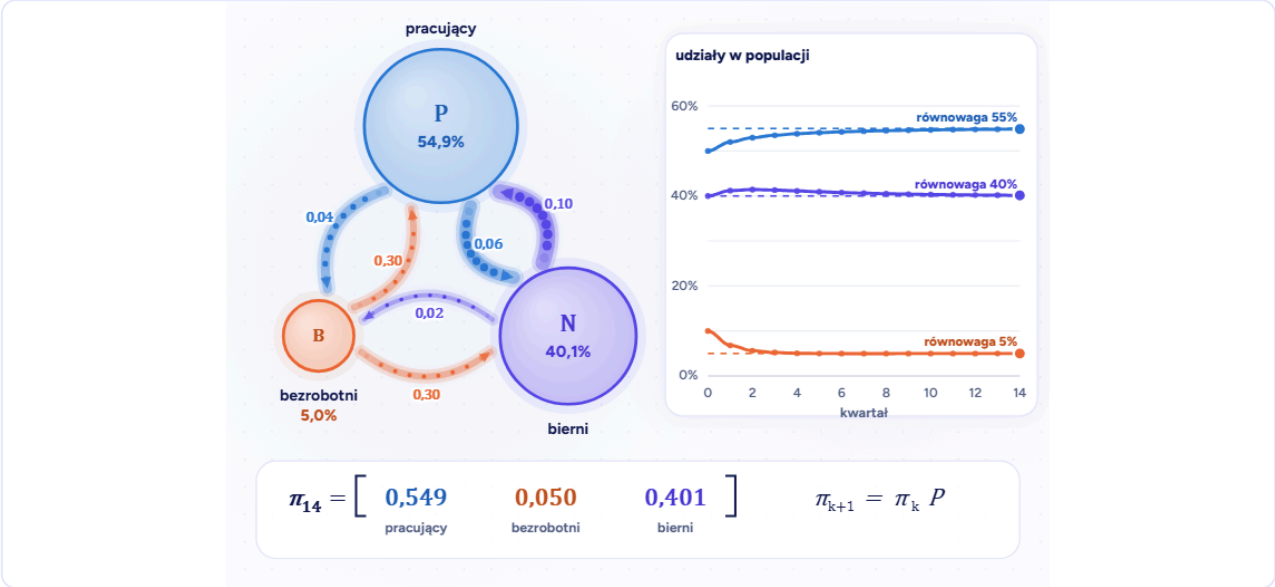
Łańcuch Markowa: przepływy na rynku pracy

Co kwartał część osób zmienia status na rynku pracy: pracujący (P) tracą pracę albo odchodzą z rynku, bezrobotni (B) znajdują zatrudnienie, bierni zawodowo (N) zaczynają szukać pracy. Prawdopodobieństwa przejść w ciągu kwartału zapisujemy w **macierzy przejść** P: wiersz to stan obecny, kolumna — stan za kwartał, w kolejności P, B, N.

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}02 & 0{,}88 \end{bmatrix}$$

Na przykład $0{,}3$ w drugim wierszu i pierwszej kolumnie oznacza, że 30% bezrobotnych w ciągu kwartału znajduje pracę. Strukturę populacji opisuje wektor wierszowy udziałów π_k; po kwartale $\pi_{k+1} = \pi_k P$:

$$\pi_1 = \pi_0 P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}02 & 0{,}88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}068 & 0{,}412 \end{bmatrix}$$



Stan równowagi: 55% · 5% · 40%. Przepływy się równoważą — tyle samo osób wchodzi do każdego stanu, ile z niego wychodzi.

Animacja 7. Przepływy między stanami w kolejnych kwartałach. Grubość strumienia odpowiada liczbie osób zmieniających status; udziały zbliżają się do stanu równowagi. **Wersja interaktywna jest w lekcji online.**

Po k kwartałach $\pi_k = \pi_0 P^k$ — tu przydają się potęgi macierzy. Element $(P^2)_{ij}$ to prawdopodobieństwo przejścia z i do j w ciągu dwóch kwartałów, np. $(P^2)_{BP} = 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}42$.

Udziały stabilizują się w **stanie równowagi** π, którego macierz przejść już nie zmienia: $\pi P = \pi$. To układ równań liniowych z warunkiem, że udziały sumują się do 1:

$$\begin{cases} 0{,}9\,\pi_P + 0{,}3\,\pi_B + 0{,}1\,\pi_N = \pi_P \\ 0{,}04\,\pi_P + 0{,}4\,\pi_B + 0{,}02\,\pi_N = \pi_B \\ 0{,}06\,\pi_P + 0{,}3\,\pi_B + 0{,}88\,\pi_N = \pi_N \\ \pi_P + \pi_B + \pi_N = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie to $\pi = [0{,}55 \quad 0{,}05 \quad 0{,}4]$: w długim okresie 55% populacji pracuje, 5% jest bezrobotnych, a 40% pozostaje biernych zawodowo. Stopa bezrobocia — udział bezrobotnych wśród aktywnych zawodowo — wynosi więc w równowadze ok. 8,3%.

TRIK | **Wiersze macierzy przejść sumują się do 1**

Z każdego stanu trzeba gdzieś trafić — także zostać na miejscu — więc suma każdego wiersza P to 1. Sprawdź to, zanim zaczniesz liczyć.

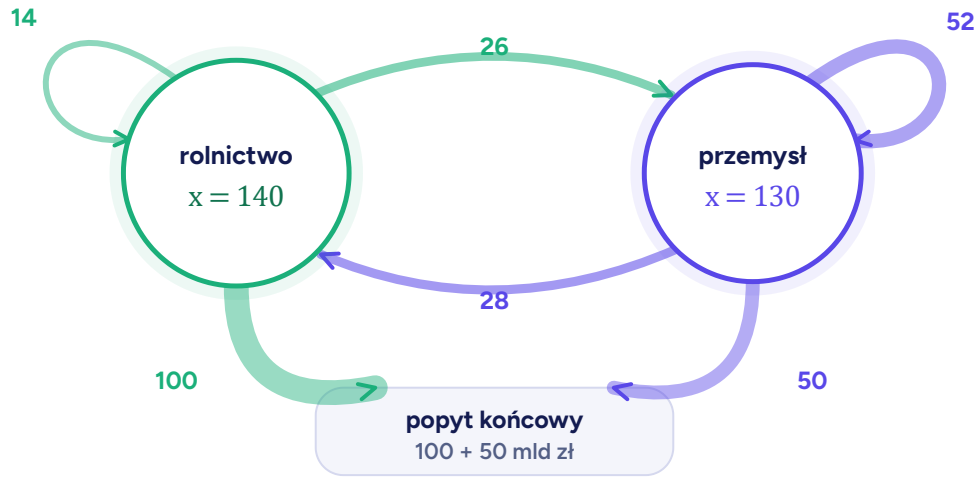
TRIK | **Równowaga z układu równań**

Równania $\pi P = \pi$ są zależne (rząd o 1 mniejszy niż liczba stanów), więc mają nieskończenie wiele rozwiązań. Jedno z nich zastąp warunkiem $\pi_P + \pi_B + \pi_N = 1$ — wtedy rozwiązanie jest dokładnie jedno.

Model Leontiefa: gospodarka jako układ równań

Sektory gospodarki zużywają nawzajem swoje produkty. **Współczynnik techniczny** a_{ij} mówi, ile produktu sektora i potrzeba do wytworzenia jednostki produktu sektora j. Dla dwóch sektorów — rolnictwa i przemysłu — oraz popytu końcowego d (w mld zł):

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$



Rys. 8. Przepływy międzygałęziowe. Część produkcji każdego sektora wraca do gospodarki jako zużycie pośrednie (strzałki między sektorami i pętle), reszta trafia do odbiorców końcowych.

Produkcja x musi pokryć zużycie pośrednie Ax i popyt końcowy: $x = Ax + d$. Stąd $(I - A)\,x = d$ i

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}8 \end{bmatrix} \qquad x = (I - A)^{-1} d = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 130 \end{bmatrix}$$

Rolnictwo musi wytworzyć 140 mld zł, a przemysł 130 mld zł, choć odbiorcy końcowi kupią tylko 100 i 50 — resztę gospodarka zużywa sama:

$$x - Ax = \begin{bmatrix} 140 \\ 130 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = d$$

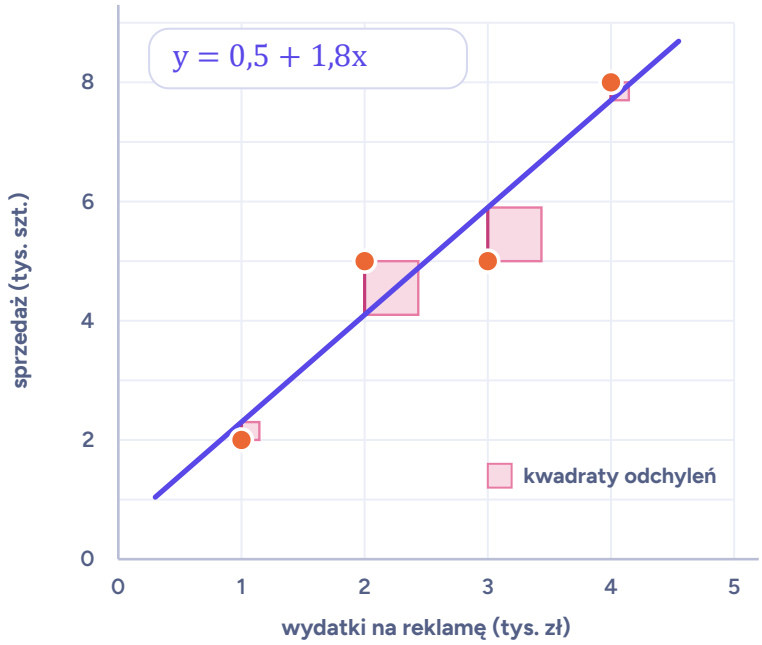
TRIK | **Macierz mnożników**

Element (i, j) macierzy $(I - A)^{-1}$ mówi, o ile wzrośnie produkcja sektora i, gdy popyt końcowy na produkt j wzrośnie o jednostkę. Wzrost popytu na produkty przemysłu o 1 mld zł wymaga 0,4 mld zł produkcji rolnej i 1,8 mld zł przemysłowej.

Regresja liniowa: prosta dopasowana do danych

Firma notowała wydatki na reklamę (x, w tys. zł) i sprzedaż (y, w tys. sztuk) w czterech miesiącach. Szukamy prostej $y \approx \beta_0 + \beta_1 x$, która najlepiej pasuje do punktów. Kolumna jedynek w macierzy X odpowiada wyrazowi wolnemu β_0:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Rys. 9. Metoda najmniejszych kwadratów: prosta minimalizuje sumę pól kwadratów zbudowanych na odchyleniach punktów od prostej.

Metoda najmniejszych kwadratów wybiera współczynniki tak, by suma kwadratów odchyleń była najmniejsza. Prowadzi to do układu równań, którego rozwiązanie zapisuje się jednym wzorem:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \qquad X^T y = \begin{bmatrix} 20 \\ 59 \end{bmatrix}$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Prosta $y = 0,5 + 1,8\,x$: każdy dodatkowy tysiąc złotych na reklamę wiąże się ze wzrostem sprzedaży średnio o 1,8 tys. sztuk. Ten sam wzór liczy regresję z wieloma zmiennymi — dochodzą tylko kolumny macierzy X.

> **DLA CIEKAWYCH** | **Wartości i wektory własne**
>
> Stan równowagi π to wektor, którego macierz przejść nie zmienia: $\pi P = \pi$. Ogólnie wektor v, który macierz tylko skaluje ($Av = \lambda v$), nazywa się **wektorem własnym**, a liczba λ — **wartością własną**. To jedno z najważniejszych pojęć algebry liniowej: od rankingu stron internetowych po analizę głównych składowych w statystyce.

Podsumowanie

NAJWAŻNIEJSZE

- Macierz $m \times n$ to tabela danych; a_{ij} — najpierw wiersz, potem kolumna. Dodajemy element po elemencie, transpozycja odbija względem przekątnej.
- Iloczyn AB istnieje, gdy liczba kolumn A równa się liczbie wierszy B; c_{ij} to wiersz i razy kolumna j. Zwykle $AB \neq BA$.
- Kolumny macierzy 2×2 to obrazy wektorów e_1 i e_2; iloczyn macierzy to złożenie przekształceń (od prawej).
- $|\det A|$ to skala pól, znak — orientacja. 2×2: $ad - bc$; 3×3: Sarrus; ogólnie: Laplace.
- A^{-1} istnieje tylko dla $\det A \neq 0$. $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.
- Układ $Ax = b$: Cramer $x_k = \det A_k / \det A$ albo eliminacja Gaussa do postaci schodkowej.
- Kronecker–Capelli: porównaj $r(A)$, $r([A \mid b])$ i liczbę niewiadomych n.
- Markow: $\pi_{k+1} = \pi_k P$; Leontief: $x = (I - A)^{-1} d$; regresja: $\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$.

Słowniczek

Macierz
prostokątna tablica liczb o m wierszach i n kolumnach; jej wymiar to $m \times n$.

Element macierzy
liczba a_{ij} stojąca w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

Wektor
macierz o jednej kolumnie (wektor kolumnowy) albo o jednym wierszu (wektor wierszowy).

Macierz kwadratowa
macierz o tej samej liczbie wierszy i kolumn.

Przekątna
elementy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej.

Macierz jednostkowa
macierz kwadratowa I z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią; $AI = IA = A$.

Macierz diagonalna
macierz kwadratowa, która poza przekątną ma same zera.

Macierz trójkątna
macierz kwadratowa z samymi zerami pod przekątną (górnotrójkątna) albo nad nią (dolnotrójkątna).

Macierz symetryczna

macierz kwadratowa, w której $a_{ij} = a_{ji}$, czyli $A^T = A$.

Iloczyn macierzy

macierz AB, której element c_{ij} jest sumą iloczynów i-tego wiersza A i j-tej kolumny B.

Przekształcenie liniowe

odwzorowanie płaszczyzny (przestrzeni) $x \mapsto Mx$; przeprowadza proste w proste.

Minor

wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie jednego wiersza i jednej kolumny.

Macierz odwrotna

macierz A^{-1}, dla której $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; istnieje tylko, gdy $\det A \neq 0$.

Macierz rozszerzona

macierz współczynników układu z dopisaną kolumną wyrazów wolnych, $[A \mid b]$.

Postać schodkowa

postać macierzy, w której pod pierwszym niezerowym elementem każdego wiersza stoją same zera.

Układ sprzeczny

układ równań, który nie ma rozwiązań.

Stan równowagi

rozkład π, którego macierz przejść nie zmienia: $\pi P = \pi$.

Metoda najmniejszych kwadratów

dobór współczynników modelu minimalizujący sumę kwadratów odchyleń od danych.

Transpozycja

zamiana wierszy z kolumnami; element a_{ij} przechodzi na miejsce (j, i).

Schemat Falka

zapis mnożenia, w którym B stoi nad wynikiem, a A po jego lewej stronie.

Wyznacznik

liczba $\det A$ przypisana macierzy kwadratowej; jej moduł to skala pól (objętości), znak — orientacja.

Dopełnienie algebraiczne

liczba $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, gdzie M_{ij} to minor.

Macierz osobliwa

macierz kwadratowa o wyznaczniku równym zeru; nie ma odwrotnej.

Operacje elementarne

zamiana wierszy, pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera, dodanie do wiersza wielokrotności innego.

Rząd macierzy

liczba niezerowych wierszy w postaci schodkowej; liczba niezależnych wierszy (kolumn).

Macierz przejść

macierz prawdopodobieństw przejść między stanami w jednym okresie; każdy jej wiersz sumuje się do 1.

Współczynnik techniczny

w modelu Leontiefa: nakład produktu sektora i na jednostkę produkcji sektora j.